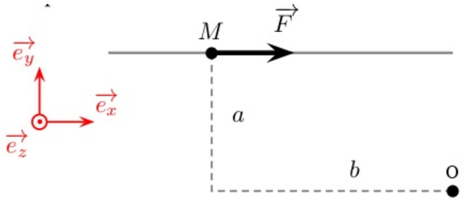
TD P11 : DYNAMIQUE DE ROTATION

Répertoire P11

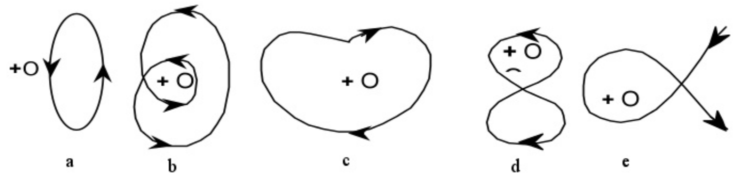
⋆⋆⋆ moment cinétique d'un point matériel en un point⋆⋆⋆ moment cinétique d'un point matériel par rapport à un axe orienté ⋆⋆⋆ moment cinétique d'un système de points matériels en un point⋆⋆⋆ moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe ⋆⋆⋆ moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe ⋆⋆⋆ torseur cinétique /cinématique ⋆⋆⋆ moment d'une force par rapport à un point - cas où il est nul ⋆⋆⋆ moment d'une force par rapport à un axe ⋆⋆⋆ bras de levier ⋆⋆⋆ couple ⋆⋆⋆ liaison pivot ⋆⋆⋆ couple de frottements solides / fluides ⋆⋆⋆ couple de torsion ⋆⋆⋆ théorème du moment cinétique pour un point matériel en un point fixe / par rapport à un axe fixe ⋆⋆⋆ théorème du moment cinétique pour un solide en un point fixe ⋆⋆⋆ théorème du moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe ⋆⋆⋆ pendule pesant ⋆⋆⋆ bifurcation ⋆⋆⋆ énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe ⋆⋆⋆ théorème de l'énergie cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe

QCM P11

1. Quelle est la dimension du moment évalué en O d'une force $\overrightarrow{F}$ appliquée en M ?
   (a) M.L^2 .T^{-1} (b) M.L.T^{-2} (c) M.L^2.T^{-2} (d) L^2.T^{-3}
2. A quelle autre(s) grandeur(s) physique(s) rencontrée(s) dans le cours de mécanique est homogène le moment d'une force ?
   (a) à une énergie (b) à une puissance (c) à un travail (d) à une accélération
3. Le bras de levier de la force $\overrightarrow{F}$ par rapport à l'axe (O, $\overrightarrow{e_z}$) est
   (a) a
   (b) b
   (c) $\sqrt{a^2+b^2}$



4. Le moment en O de la force F est
   (a) -Fa$\overrightarrow{e_z}$ (b) Fb$\overrightarrow{e_z}$ (c) - Fb$\overrightarrow{e_z}$ (d) F$\sqrt{a^2+b^2}\overrightarrow{e_z}$
5. Le moment de la force F par rapport à l'axe (O, $\overrightarrow{e_y}$) est
   (a) Fa (b) Fb (c) 0 (d) -Fb
6. Parmi les courbes planes ci-dessous, quelles sont celles qui ne peuvent pas être la trajectoire d'une particule soumise à un champ de force centrale dont le centre serait en O ?



7. Le moment d'inertie d'un cylindre de rayon R et de hauteur h par rapport à son axe est
   (a) $\frac{1}{2}mR^2$ (b) $\frac{1}{2}m\omega^2$ (c) $\frac{1}{2}mR^2\omega^2$ (d) $\frac{1}{2}mRh$
8. Le plateau d'un tourne-disque est conçu pour que sa vitesse angulaire ne varie pas du fait de petites fluctuations du moteur. Pour cela, on choisit
   (a) un plateau le plus lourd possible
   (b) un plateau le plus léger possible
   (c) un plateau de grand moment d'inertie
   (d) un plateau de plus petit rayon possible
9. Les interactions internes d'un système isolé peuvent modifier
   (a) seulement son moment cinétique
   (b) seulement sa quantité de mouvement
   (c) les deux à la fois
   (d) ni l'un ni l'autre

Réponses : 1.c ; 2.a et c ; 3. a ; 4.a ; 5.c ; 6. b,d et e ; 7. a. ; 8. c ; 9. d

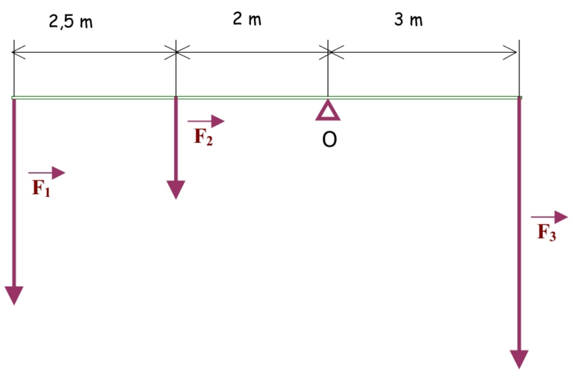
1 moment cinétique d'un point

1. Soit un point matériel M de masse m astreint à se déplacer dans le plan (Oxy) dans un référentiel $\mathcal{R}$ de repère (Oxyz). Exprimer le moment cinétique du point M par rapport à O en fonction des ses coordonnées

cartésiennes et des vecteurs de la base cartésienne et représenter ce vecteur pour une position quelconque de M.
Exprimer le moment cinétique du point M par rapport à l'axe (Oz) en fonction de ses coordonnées cartésiennes.

2. Répondre aux mêmes questions en coordonnées cylindriques d'axe (Oz).

2 moment résultant



$F_1 = 200$ N ; $F_2 = 100$ N et $F_3 = 250$ N

— Quelle est la valeur absolue du moment résultant par rapport à l'axe de rotation de l'ensemble de ces 3 forces ?

— Dans quel sens la barre va-t-elle tourner ?

3 chute libre

On lance dans le champ de pesanteur terrestre un point matériel M, de masse m, à partir du point O, avec une vitesse horizontale $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{e_x}$. On néglige tout frottement. L'axe (Oz) est l'axe vertical ascendant. g = 9,8 m/s^2.

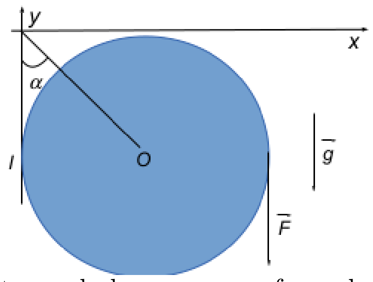
1. Exprimer le moment par rapport à O des forces agissant sur M à chaque instant en fonction des données et de t. Commenter son signe.
2. Calculer le moment cinétique de M par rapport à O, à l'instant t.
3. Enoncer et vérifier le théorème du moment cinétique à partir des résultats obtenus.

4 poulie parfaite

Comparer les forces exercées sur une corde de part et d'autre d'une poulie parfaite (c'est à dire de masse quasi nulle, et ayant une liaison parfaite sans frottement).

5 essuie-tout glissant sur un mur

Un rouleau d'essuie-tout assimilé à un cylindre d'axe (Oz), de rayon r, de masse m, de moment d'inertie J par rapport à son axe, frotte le long du mur en un point I (on notera μ_d le coefficient de frottement dynamique). Son axe est relié au mur par une ficelle qui fait un angle α avec le mur. On tire sur le papier verticalement vers le bas avec une force de norme F pour faire tourner le rouleau avec le vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega} = \Omega_z\overrightarrow{e_z}$. Déterminer l'équation différentielle suivie par Ω_z.



6 poulie non idéale

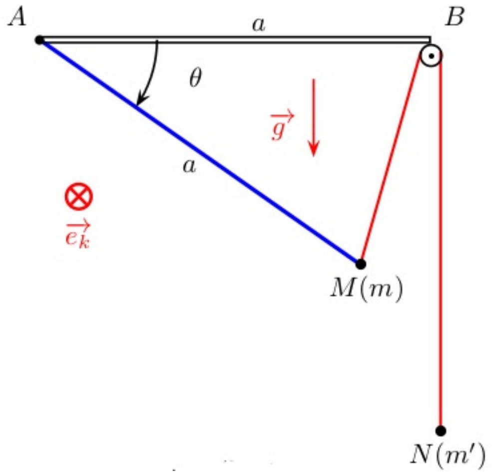
Une masse M = 10,0 kg est suspendue à l'extémité d'une corde enroulée autour d'un cylindre de rayon r = 10,0 cm et de masse m = 2,00 kg libre de tourner sans frottement autour de son axe Δ, horizontal et fixe. Quelles sont la tension de la corde et les accélérations du cylindre et de la masse, si on laisse celle-ci descendre librement ?

7 Moments des forces et condition d'équilibre

Soit un fil inextensible et sans masse, fixé en A à un socle horizontal AB (de longueur a), et passant en B sur une poulie parfaite, de très petites dimensions. En un point M du fil, tel que AM = a, est fixée une masse ponctuelle m, et au bout du fil, est aussi accrochée une masse m' en N. Le dispositif est placé verticalement dans le champ de pesanteur .

1. Établir le bilan des forces qui s'exercent sur point M et exprimer leurs moments en A ; le seul angle devant intervenir dans ces expressions sera θ.

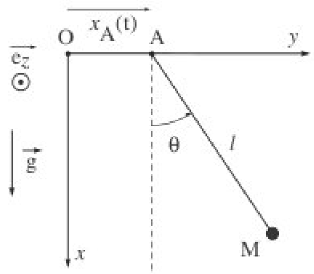
2. Trouver une condition sur m et m' pour qu'une position d'équilibre existe. Exprimer, quand il existe, l'angle d'équilibre θ_{eq} en fonction de m et m'. Préciser la condition d'existence en fonction de m et m'.



8 moment cinétique appliqué en un point mobile

Soit un pendule simple, de masse m et de longueur l. On impose de petites oscillations horizontales à son extrémité A : $y_A = y_0 \sin \omega t$.

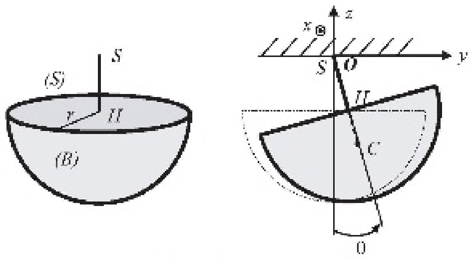
1. Pour utiliser le théorème du moment cinétique, pourquoi vaut-il mieux l'appliquer au point mobile A plutôt qu'au point fixe O ? Reprendre alors la démonstration du théorème pour exprimer la dérivée $(\frac{d\overrightarrow{\mathcal{L}_A}}{dt})_{R_g}$
2. Établir l'équation du mouvement du pendule simple effectuant de petites oscillations.
3. Quel est son mouvement lorsqu'un régime sinusoïdal forcé s'est établi (ce qui suppose quelques frottements, que nous avons en fait négligés)
4. Quelle est la pulsation ω_0 au voisinage de laquelle nos hypothèses d'étude sont à reprendre ? Que dire des mouvements du point A et du mobile selon que $\omega<\omega_0$ ou que $\omega>\omega_0$?



9 pendule solide

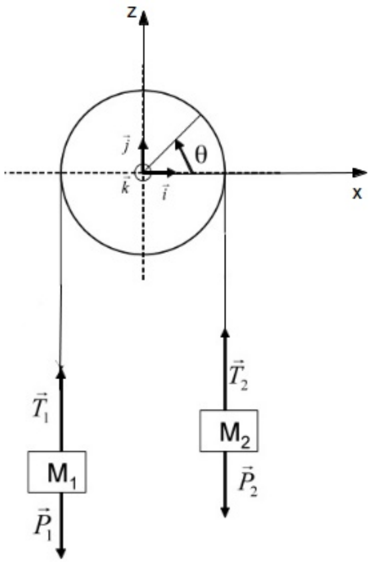
S est constitué d'une demi-boule homogène B de base de centre H, de masse M, de rayon r, et d'une tige HS, de masse négligeable devant celle de B, de longueur $\ell = \frac{5}{8}r$, de section négligeable, perpendiculaire au plan équatorial de la demi-boule.
Le solide est suspendu par l'extrémité S en un point O fixe, origine du repère du référentiel terrestre. Il peut osciller autour de l'axe horizontal (Ox) grâce à une liaison pivot parfaite.
On désigne par θ l'angle que fait SH avec la verticale descendante.
Le centre d'inertie C de la demi-boule se trouve à une distance $d = \frac{3}{8}r$ de H et son moment d'inertie par rapport à l'axe (Ox) est noté J.

1. Combien S a-t-il de degrés de liberté ?
2. Quel est le système de coordonnées adapté à la description du mouvement ?
3. Faire le bilan des actions extérieures sur S.
4. Comment, la condition de liaison parfaite se traduit-elle du point de vue mécanique ?
5. Etablir l'équation du mouvement de S



Pendule solide en forme de demi-boule

10 machine d'Atwood



Une machine d'Atwood se compose d'une poulie homogène de masse M, de rayon R et de moment d'inertie I par rapport à son axe de rotation, fixe dans le référentiel terrestre, d'un fil idéal enroulé autour de la poulie et de deux cylindres métalliques de masses m_1 et m_2 accrochés aux extrémités du fil.
La poulie tourne sans frottement appréciable autour d'un axe horizontal et il n'y a pas de glissement du fil sur la poulie. L'accélération de la pesanteur est notée g.
On fait le choix d'un axe vertical ascendant (Oz) et d'un axe horizontal Ox situé dans le plan médian de la poulie

1. Etablir une relation entre $\dot{z}_1$ (relatif au centre d'inertie de m_1) et $\dot{\theta}$, ainsi qu'entre $\dot{z}_2$ (relatif au centre d'inertie de m_2) et $\dot{\theta}$.
2. Déterminer les forces appliquées à la poulie, (Indication : dans ce genre de problème contenant des fils tendus, il faut couper ceux-ci par la pensée au niveau où ils quittent la poulie et placer aux points de coupure les forces de tension) puis établir à l'aide du théorème du moment cinétique une relation entre $\ddot{\theta}$, T_1 et T_2.
3. Appliquer la loi de la quantité de mouvement à chacune des masses et en déduire deux nouvelles relations entre $\ddot{\theta}$, T_1 et T_2
4. Déterminer alors $\ddot{z}_1$
5. Que deviennent ces résultats si :
   (a) $m_1 = m_2$ quelque soit I ;
   (b) $M \ll m_1$ et m_2
6. Déterminer $\ddot{z}_1$ dans le cas où $m_2 = 2\, m_1$ lorsque :
   (a) M est négligeable ;
   (b) $M = m_2$ et la poulie est assimilée à un disque homogène.

11 couple moteur

1. Régime transitoire.

Initialement immobile, une machine tournante horizontale de moment d'inertie J par rapport à son axe, est soumise à partir de l'instant $t = 0$ l'action d'un couple moteur de moment Γ_0 constant.

1. Établir l'équation du mouvement de la machine en supposant que l'ensemble des forces de frottement a un moment par rapport à l'axe de rotation de la forme - $k\dot{\theta}$ où $\dot{\theta}$ est la vitesse angulaire de la machine autour de son axe fixe.
2. Analyser ce mouvement en identifiant d'abord la vitesse angulaire $\dot{\theta}_0$ atteinte en régime permanent ainsi que le temps de relaxation τ du système.

2. Influence d'une vibration

On reprend l'étude précédente en supposant que, en raison de vibrations indésirables, le couple moteur n'est plus une constante mais est modulé sous la forme : $\Gamma = \Gamma_0(1+\eta\cos(\Omega t))$

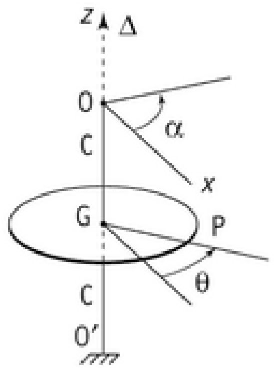
1. Reprendre l'étude du mouvement en établissant l'équation différentielle vérifiée par la fonction ε(t) telle que : $\dot\theta(t) = \dot\theta_0[1+\varepsilon(t)]$
2. Montrer que, au bout d'un temps suffisant, ε(t) est une fonction sinusoïdale de pulsation Ω que l'on cherchera sous la forme : $\varepsilon(t) = \alpha\cos(\Omega t - \psi)$. On exprimera les constantes α et ψ en fonction des données η, Ω et τ.

3. Rôle d'un volant.

A l'aide des expressions précédentes, expliquer pourquoi, de façon à régulariser le fonctionnement d'une machine tournante, on adjoint aux parties tournantes un anneau massif et de grand rayon appelé volant.

12 oscillations d'un disque

Un disque de centre de garvité G est relié aux points O et O' d'un axe vertical par deux fils de torsion de même constante C. Il possède un moment d'inertie J par rapport à cet axe. On impose à l'extrémité O du fil supérieur une torsion $\alpha = \alpha_0\cos\omega t$ à partir de la position d'équilibre. A l'instant initial, le disque est immobile à sa position d'équilibre : $\theta(0) = 0$ et $\dot\theta(0) = 0$.



1. Etablir l'expression de θ en fonction du temps. On introduira $\Omega = \dfrac{2C}{J}$ et on supposera que $\omega \neq \Omega$.
2. Commenter les cas limites $\omega \gg \Omega$ et $\omega \ll \Omega$.
3. Le disque subit en fait des frottements fluides dont le moment (très faible) par rapport à l'axe est $-2\lambda J\dot\theta$. Etablir l'expression de θ en fonction du temps et commenter.

Réponses

ex. 2 : le moment résultant vaut 35 N.m et la barre tourne dans le sens trigonométrique.

ex.4 : la poulie idéale transmet la norme de la tension

ex.5 : $J\dot\Omega_z = \dfrac{r\mu_d\tan\alpha(P+2F)-F}{1-\mu_d\tan\alpha}$

ex.6 : $T = \dfrac{Mmg}{2M+m}$ et $\ddot\theta = \dfrac{2Mg}{(2M+m)R}$

ex.7 : $\cos\dfrac{\theta_{eq}}{2} = \dfrac{m'+\sqrt{m'^2+8m^2}}{4m}$, qui admet une solution si m $\geq$ m'.

ex.8 : 2. $\ddot\theta + \dfrac{g}{\ell}\theta = \dfrac{y_0}{\ell}\omega^2\sin\omega t$; 3. $\theta = \dfrac{\frac{y_0}{\ell}}{\frac{g}{\ell\omega^2}-1}$

ex.9 : 5. $\ddot\theta + \dfrac{MGr}{J}\sin\theta$

ex.10 : 4. $\ddot z_1 = g\dfrac{m_2-m_1}{\frac{I}{R^2}+m_1+m_2}$

ex.11 : 1. $\dot\theta_0 = \dfrac{\Gamma_0}{k}$ et $\tau = \dfrac{J}{k}$; 2. $\alpha = \dfrac{\eta}{\sqrt{1+(\tau\Omega)^2}}$ et $\psi = \arctan(\tau\Omega)$

ex.12 : 1. $\theta = \dfrac{C\alpha_0}{J(\omega^2-\Omega^2)}(\cos(\Omega t)-\cos(\omega t))$;

3. $\theta = \dfrac{C\alpha_0}{J((\omega^2-\Omega^2)^2+4\lambda^2\omega^2)}((\omega^2-\Omega^2)\cos(\omega t)+2\lambda\omega\sin(\omega t))$

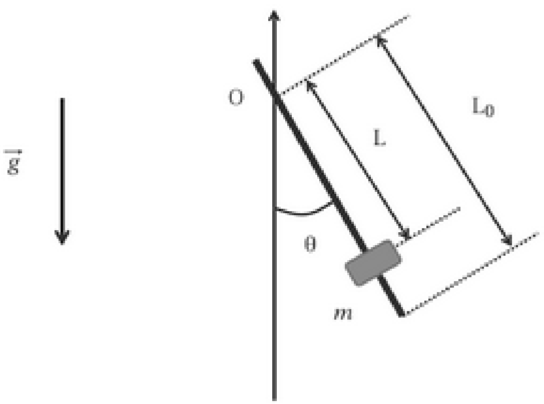
TDP11 : POUR ALLER PLUS LOIN

1 calculs de moments d'inertie

1. Démontrer que le moment d'inertie d'une circonférence homogène de masse M et de rayon R par rapport à l'axe perpendiculaire à son plan et passant par son centre est égal à MR^2. Calculer le moment d'inertie d'un disque homogène de masse M et de rayon R par rapport à son axe (Oz)
2. Donner l'expression du moment d'inertie, par rapport à l'axe de révolution, d'un cylindre homogène creux de rayon intérieur r, de rayon extérieur R, de hauteur h, constitué d'un matériau de masse volumique μ.
3. Dans le cas du disque démontrer le théorème de Huygens : le moment d'inertie du disque par rapport à un axe Δ parallèle à Oz et à la distance d de cet axe est $I_\Delta = I_{Oz} + Md^2$.

2 pendule à masse réglable

On s'intéresse à un pendule pesant modélisé par une tige cylindrique de masse $m_0 = 18$ g et de longueur $L_0 = 46$ cm. Sur ce pendule simple à différentes distances L de l'axe de rotation, on fixe une masse $m = 185$ g considérée comme ponctuelle. Le dispositif est le suivant :



Le moment d'inertie total du système s'écrit comme la somme des moments d'inertie de la masse et de la tige soit $J = mL^2 + \frac{1}{3}m_0 L_0^2$.

a) Calculer la distance minimale L_{min} à laquelle on peut fixer la masse pour que la contribution de la tige au moment d'inertie soit au maximum de 15 % du moment d'inertie de la masse. Calculer la valeur numérique de L_{min}. Dans ces conditions, on peut négliger l'influence de la masse de la tige et considérer que $J \approx mL^2$ ce qui revient à utiliser le modèle simplifié d'une masse m fixée sur une tige de longueur L et de masse négligeable.

b) La liaison pivot en O est supposée parfaite et le centre de gravité du système est confondu avec celui de la masse. En outre, on suppose que le système est soumis à des forces de frottement fluide qu'on modéliser par un couple $\vec{\Gamma}_{fr} = -\beta\dot{\theta}\vec{u}_\Delta$ en notant β une constante. Etablir l'inventaire des actions mécaniques s'exerçant sur ce système. En appliquant le théorème du moment cinétique, montrer que l'équation régissant l'évolution temporelle de l'angle θ entre la tige et la verticale descendante peut s'écrire dans le cadre de l'approximation des petits angles :

$$\ddot{\theta} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

On exprimera Q et ω_0 en fonction de g, L, m et β et on précisera le nom de la constante Q.

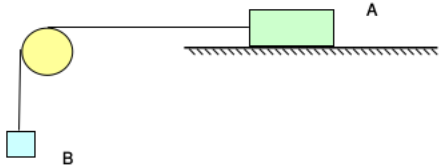
c) Dans le cadre d'un régime pseudo-périodique, la solution peut s'écrire :

$$\theta(t) = \theta_m \cos(\Omega t + \varphi)\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Exprimer Ω et τ en fonction de ω_0 et Q. Simplifier l'expression de Ω en l'exprimant en fonction de ω_0 seul lorsque $Q \gg 1$.

3 mouvement d'un ensemble de solides

On considère l'ensemble représenté ci-dessous, constitué de deux corps A et B de masses respectives M et m reliés par un fil inextensible et de masse négligeable passant sur la gorge d'une poulie assimilable à un disque de masse m' et de rayon r. Les frottements s'exerçant sur la poulie équivalent à un couple dont le moment par rapport à l'axe est constant et a pour valeur C. Ceux qui s'exercent sur A équivalent à une force opposée à la vitesse et de valeur constante f. Le système, maintenu en équilibre, est abandonné à la date t=0. Déterminer l'accélération de B.



Réponses

ex.1 : 1. $I_{Oz} = \dfrac{1}{2}MR^2$; 2. $I_{Oz} = \dfrac{\pi\mu h}{2}(R^4 - r^4)$

ex.2 : 1. $L_{min} = 22\,cm$; 2. $Q = \sqrt{\dfrac{mgLJ}{\beta^2}}$ et $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{mgL}{J}}$

ex.3 : $\ddot{z}_B = \dfrac{2(mgr - fr - C}{r(2m + 2M + m')}$