annexe 1 TP : Mesurage, erreur et incertitude

On appelle **mesurage ou mesure** l'ensemble des opérations permettant de déterminer expérimentalement une ou plusieurs valeurs que l'on peut raisonnablement attribuer à une grandeur (appelée **mesurande**).
Exemple : quand on mesure la tension U aux bornes d'un dipôle, le mesurage est effectué avec un voltmètre et le mesurande est U.

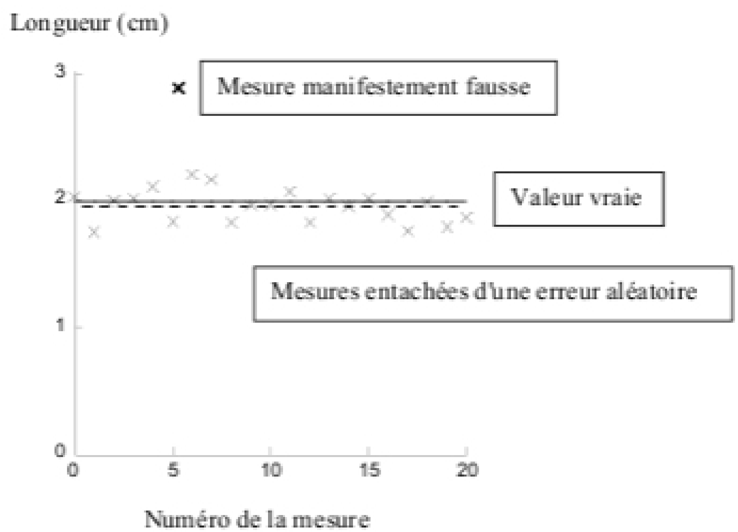
La **valeur vraie** G_{vraie} de la grandeur est la valeur que l'on obtiendrait si le mesurage était parfait. Un mesurage n'étant jamais parfait, cette valeur est toujours inconnue. Seule la valeur vraie d'une grandeur étalon est connue car elle est fixée par convention.
En général, on doit donc donner avec le résultat d'une mesure expérimentale effectuée en TP une évaluation de l'incertitude de mesure, ceci dans le but :
- d'estimer correctement le nombre de chiffres significatifs à retenir dans le résultat ;
- de confronter plus efficacement l'expérience avec un modèle théorique ;
- de réaliser une critique plus constructive du protocole expérimental et/ou du modèle théorique.

1 erreur

1.1 types d'erreurs

Les erreurs de mesures peuvent avoir trois causes : l'expérimentateur, l'appareil de mesure ou la méthode employée. Elles peuvent être de deux types :

→ les erreurs aléatoires sont des erreurs différentes à chaque mesure effectuée dans les mêmes conditions, par excès ou par défaut, sur lesquelles l'expérimentateur n'a pas prise. Les variations entre les observations répétées sont supposées se produire parce que les grandeurs d'influence qui peuvent affecter le résultat de mesure ne sont pas maintenues parfaitement constantes.

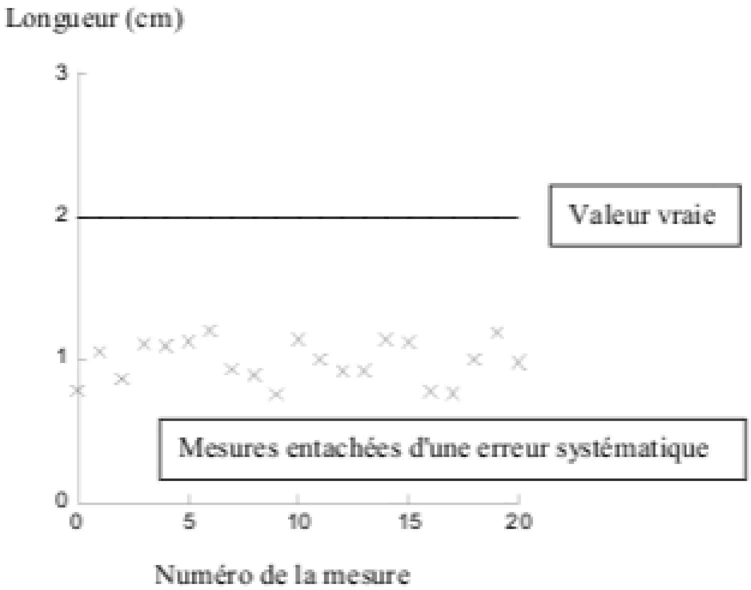


Un exemple d'erreur aléatoire est la mesure du temps avec un chronomètre. L'erreur vient du temps de réaction de l'expérimentateur au démarrage et à l'arrêt du chronomètre. Comme ce temps de réaction n'est pas toujours le même, la valeur mesurée peut être sur-évaluée ou sous-évaluée.

Bien qu'il ne soit pas possible de compenser l'erreur aléatoire d'un résultat de mesure unique, elle peut généralement être réduite en augmentant le nombre d'observations : son espérance mathématique est nulle.

Pour réduire les erreurs aléatoires (après s'être auparavant débarrassé des erreurs systématiques), il faut donc faire un grand nombre de mesures puis faire une moyenne. L'erreur aléatoire sur la mesure i est $G_i - \overline{G}$, où $\overline{G}$ est la moyenne d'un nombre infini de résultats de mesurages effectués dans les mêmes conditions (évidemment inconnue !).

→ les erreurs systématiques se reproduisent identiques à elles-mêmes à chaque mesure.

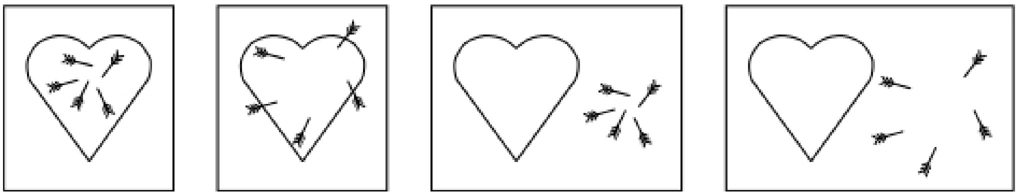


Les erreurs systématiques peuvent avoir plusieurs sources

- L'appareil de mesure, qui peut être défectueux, ou mal étalonné. Par exemple, l'affichage peut ne pas indiquer zéro pour une mesure nulle, ou encore les valeurs affichées peuvent être multipliées, par rapport aux « vraies » valeurs, par une constante ou une fonction dont la valeur est proche de l'unité.
- Le mode d'utilisation de l'appareil : observer la position d'un objet (comme une aiguille) devant des graduations sans maintenir sa ligne de vision perpendiculaire aux graduations (erreur de "parallaxe") ; mesurer un intervalle de temps en employant des procédures différentes au départ et à l'arrêt du chronomètre.
- La présence d'un facteur non prévu. Certains événements ou phénomènes, comme une modification sur un montage ou sur un appareil de mesure, peuvent venir modifier les résultats d'une partie des mesures.

Les erreurs systématiques sont souvent difficiles à détecter a priori, mais elles peuvent dans les cas les plus simples être déduites a posteriori à partir de l'allure des résultats. Il est alors possible de corriger les valeurs mesurées en leur ajoutant une correction compensant pour l'erreur systématique.

Remarque 1 : le télescope spatial Hubble présentait ce type d'erreur juste après son lancement (aberration sphérique systématique), du fait d'une procédure de test défaillante lors du polissage de son miroir primaire, qui avait donc une forme réelle différente des spécifications !
Remarque 2 : l'erreur systématique est l'écart entre la valeur vraie du mesurande et la moyenne qui résulterait d'un nombre **infini** de mesurages du même mesurande, effectués dans les conditions de répétabilité (voir ci-dessous) : $\overline{G} - G_{vraie}$



1er cas : faible erreur systématique et aléatoire ;
2ème cas : faible erreur systématique et forte erreur aléatoire ;
3ème cas : forte erreur systématique et faible erreur aléatoire ;
4ème cas : forte erreur systématique et forte erreur aléatoire.

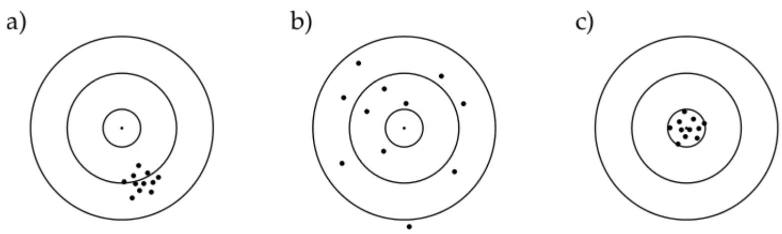
En physique, on ne connaît pas la position du centre de la cible (G_{vraie}) donc l'erreur aléatoire et l'erreur systématique sont par définition. On va donc chercher à définir un intervalle de valeurs qui pourraient raisonnablement être attribuées à la grandeur mesurée.

L'**exactitude de la mesure** est l'étroitesse de l'accord entre le résultat d'**un** mesurage et une valeur vraie du mesurande, par définition qualitative !

La **répétabilité de la mesure** est l'étroitesse de l'accord entre les résultats des mesurages successifs du même mesurande, mesurages effectués dans la totalité des mêmes conditions de mesure, appelées conditions de répétabilité. Les conditions de répétabilité comprennent :
- même mode opératoire
- même observateur
- même lieu
- répétition durant une courte période de temps
- même instrument de mesure utilisé dans les mêmes conditions

1.2 caractéristiques métrologiques d'un appareil de mesure

Pour effectuer des mesures exactes et répétables, il est nécessaire d'utiliser un appareil de mesure :
- juste (**justesse** : étroitesse de l'accord entre la moyenne d'un nombre infini de valeurs mesurées répétées et une valeur de référence. Un appareil est donc d'autant plus juste que son erreur systématique est faible.)
- fidèle (**fidélité** : étroitesse de l'accord entre les indications ou les valeurs mesurées obtenues par des mesurages répétés du même objet ou d'objets similaires dans des conditions spécifiées et avec une bonne sensibilité.



Différents types de mesure : a) une mesure fidèle mais inexacte, b) différentes mesures avec une faible exactitude et une faible fidélité, c) des mesures justes et fidèles

On parle de **reproductibilité** d'une mesure lorsque l'accord entre les résultats des mesurages du même mesurande est étroit, les mesurages étant effectués **en faisant varier les conditions de mesure** autres que le mode opératoire.

— la **sensibilité** d'un appareil est le quotient de la variation d'une indication d'un système de mesure par la variation correspondante de la valeur de la grandeur mesurée. Un appareil est d'autant plus sensible qu'une petite variation de la grandeur à mesurer provoquera un changement plus grand de l'indication donnée par l'appareil de mesure.
— la **résolution** est la plus petite variation de la grandeur mesurée qui produit une variation perceptible de l'indication correspondante.

2 incertitude

2.1 incertitude absolue /relative

L'indication complète du résultat d'une mesure physique comporte la valeur qu'on estime la plus probable et l'intervalle à l'intérieur duquel on sait que se situe la vraie valeur avec un certain niveau de confiance.
La valeur la plus probable est en général le milieu de cet intervalle.

Si l'on désigne par g la valeur la plus probable de la grandeur mesurée G, par G_{vraie} la vraie valeur (qui nous est inconnue) et par U l'incertitude élargie, on a :

$$\boxed{g - U \leq G_{vraie} \leq g + U \text{ pour un niveau de confiance de n\%}}$$

Sous une forme condensée, le résultat de la mesure s'écrit :

$$\boxed{G = g \pm U, \text{unité, niveau de confiance}}$$

On peut aussi indiquer l'incertitude relative $\boxed{U_{rel} = \frac{U}{G}}$, exprimée en général en %.

2.2 évaluation de l'incertitude

→ Lorsque les incertitudes sont évaluées par des méthodes statistiques, l'évaluation est dite de type A.
→ Quand la détermination statistique n'est pas possible, on dit que l'évaluation est de type B.
→ Lorsque les sources de variabilité de la mesure sont multiples, on estime l'incertitude-type pour chacune d'entre elles et on fait un bilan global pour construire une incertitude-type composée, qui peut mélanger des évaluations de type A et de type B.

2.3 incertitude de type A

Lorsqu'un opérateur a répété n fois la mesure de G avec le même matériel, il dispose d'une série de n valeurs G_i possibles pour G.

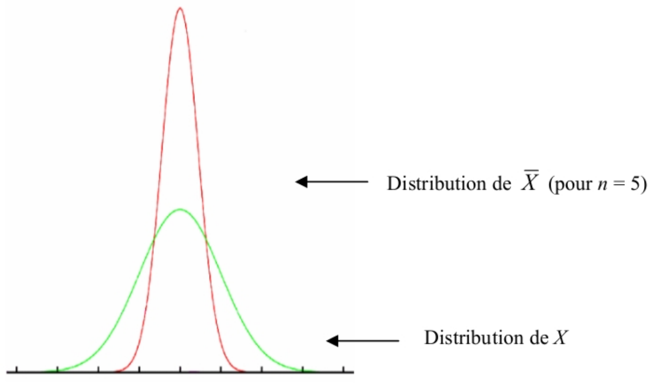
⋆ le **résultat du mesurage** est la moyenne arithmétique des n valeurs

$$\boxed{\overline{G} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} G_i}$$

⋆ **l'écart-type** expérimental, qui caractérise la dispersion des mesures, a pour expression

$$\boxed{\sigma_{exp} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(G_i - \overline{G})^2}}$$

⋆ **l'incertitude-type** sur la moyenne $\overline{G}$ est bien plus faible que celle sur une mesure unique G_i. La théorie des probabilités montre qu'elle est de la forme $\boxed{u = \frac{\sigma_{exp}}{\sqrt{n}}}$
En augmentant le nombre n de mesures, on diminue l'incertitude-type de la mesure

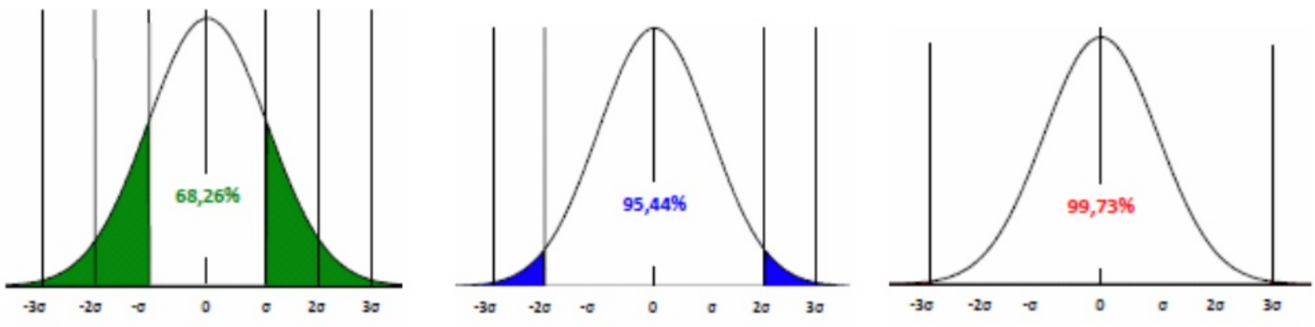


Distributions comparées : X et $\overline{X}$

Remarque 1 : Il faut toutefois rester dans des limites raisonnables : en multipliant par 25 le nombre de mesures, on ne divise que par 5 l'incertitude-type. **Il faut donc trouver le juste équilibre entre l'incertitude-type raisonnable qu'on désire obtenir et le temps qu'on veut bien consacrer aux mesures.**

Remarque 2 : on peut montrer que l'incertitude sur l'incertitude déterminée sur la moyenne de 10 valeurs est de l'ordre de 25 %, et celle sur la moyenne de 50 valeurs de l'ordre de 10 %. **On ne conservera donc en général qu'un seul chiffre significatif sur le résultat d'un calcul d'incertitude de type A**.

⋆ **l'incertitude élargie** est $\boxed{U = k.u}$ où k est le facteur d'élargissement, donné dans le tableau ci-dessous pour un intervalle de confiance de 95%. Cela signifie que la valeur varie a 95% de chance de se trouver dans l'intervalle $[\overline{G} - U; \overline{G} + U]$.



densité de $G - \overline{G}$

On peut travailler avec un autre niveau de confiance, les valeurs de k dépendant de ce niveau de confiance.

nombre de mesures	2	4	6	8	10	12
k	12,7	3,18	2,57	2,36	2,26	2,20

Exercice 1 : un opérateur a répété 8 fois la pesée de 100 mL d'eau avec une balance à 0,01 g près et obtenu les résultats suivants :

numéro i de la mesure	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
m_i *(g)*	*99,91*	*100,02*	*100,04*	*99,97*	*99,94*	*100,04*	*100,03*	*99,92*

Donner le résultat du mesurage avec un niveau de confiance de 95 %.

⋆ *le résultat du mesurage est la moyenne arithmétique des n valeurs*

⋆ *l'écart-type expérimental a pour expression*

⋆ *l'incertitude-type est*

⋆ *pour un niveau de confiance de 95 %, l'incertitude élargie est*

L'erreur d'arrondissage doit être inférieure à 1/10 de U (ici, elle doit être inférieure à 0,05 donc on arrondit au centième près).

2.4 règles de présentations de l'incertitude

— on donnera le plus souvent l'incertitude absolue avec 1 ou 2 chiffres significatifs.
— tout arrondissage des incertitudes se fera, par prudence, par excès, mais l'arrondissage ne sera effectué qu'à la dernière étape du calcul d'incertitude, pour éviter le cumul d'erreurs.
— le dernier chiffre significatif du résultat de la mesure doit être du même ordre de grandeur, à la même position décimale, que l'incertitude.

2.5 incertitude de type B

L'opérateur réalise une mesure unique et s'appuie sur la nature de l'appareil pour déterminer l'incertitude.

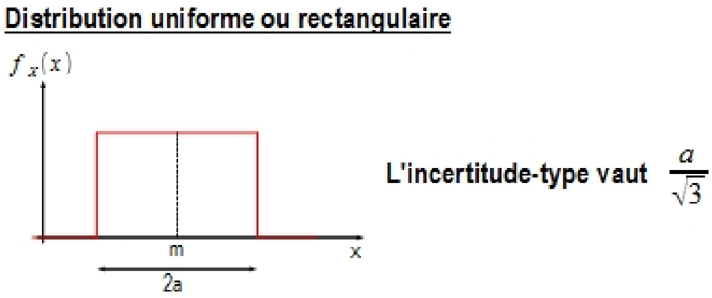
2.5.1 incertitude-type composée

Dans tous les cas, si le mesure directe présente plusieurs sources d'incertitudes **indépendantes** (de type A où B), les carrés des écarts-types correspondant aux différentes sources d'erreurs s'ajoutent de sorte que

$$\boxed{u = \sqrt{u^2_{rep(typeA)} + \sum_{type\ B} u^2_{type\ B}}}$$

2.5.2 appareil à graduation

Sans autre indication du fabricant, la résolution de l'appareil, notée q (= 2a sur la figure ci-dessous), est la valeur de la plus petite graduation. L'incertitude-type "de résolution" est alors (distribution rectangulaire)



$$\boxed{u_{res} = \frac{q}{2\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}}$$

La mesure étant unique, il n'y a aucune chance pour que son résultat soit la valeur vraie. Toutes les valeurs de l'intervalle encadrant une graduation sont équiprobables (distribution rectangulaire). Il y a 57% de chance pour que le résultat soit à moins d'un écart-type de la moyenne des mesures si on pouvait les répéter un grand nombre de fois et 95% de chance pour qu'il en soit à moins de 1,645 écarts-types.

exercice 2 : mesurer la distance qui sépare les points A et B au moyen de votre règle et préciser l'incertitude-type sur la mesure

B

×

A

×

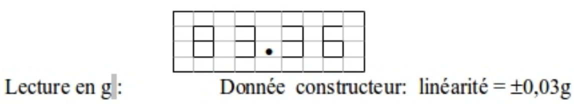
2.5.3 appareil à affichage numérique

Pour un appareil à affichage numérique, si la résolution est q, l'incertitude-type de lecture est $\boxed{u_{res} = \frac{q}{2\sqrt{3}}}$

2.5.4 appareil conforme à une classe

Pour un appareil vérifié conforme à une classe, si la classe est a, l'incertitude-type de lecture est $\boxed{u_{res} = \frac{a}{\sqrt{3}}}$

exercice 3 : une balance de précision donne le résultat suivant. Quelle est l'incertitude-type sur la mesure ?



Remarque : Pour utiliser une balance de précision, il faut :

→ *réaliser un nettoyage minutieux*
→ *positionner la balance sur un support stable*
→ *vérifier l'horizontalité*
→ *vérifier l'absence de courant d'air, de points de chaleur à proximité...*

Réponse :

2.5.5 appareil de précision (fidélité) connue

Si le fabricant indique la tolérance t de l'appareil (sous la forme $\pm t$), la distribution est à nouveau supposée rectangulaire et l'incertitude-type liée à la tolérance est alors

$$\boxed{u_{tol} = \frac{t}{\sqrt{3}}}$$

à laquelle il faut "ajouter" l'incertitude de résolution si l'appareil est à graduation (comme une burette)

exercice 4 : On mesure le volume d'une solution aqueuse versée avec une burette graduée au 1/10 ème de mL, selon la procédure suivante : remplissage de la burette et ajustage du zéro ; ouverture du robinet et fermeture lorsque le volume versé correspond à la graduation V = 12,6 mL .
Donnée du constructeur : précision = ± 0,05 mL, niveau de confiance inconnu.
Quelle est l'incertitude-type sur la mesure ?

Réponse :

2.5.6 calcul d'incertitude fourni par le constructeur

Pour les multimètres numériques, le constructeur fournit dans la notice des indications sur la fidélité de l'appareil sous la forme (% de la valeur mesurée+n digits). L'incertitude-type liée à la fidélité est alors

$$\boxed{u_{fid} = \frac{\text{\% de la v.m+n digits}}{\sqrt{3}}}$$

2.6 propagation des incertitudes

Si une grandeur y est déterminée à partir de grandeurs mesurées $x_1, ..., x_n$ **indépendantes**, l'incertitude type sur y vérifie

$$\boxed{u(y)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i)}$$

→ Cas d'une somme : $y = x_1 \pm x_2 .... \pm x_n$

$$u(y)^2 = u(x_1)^2 + u(x_2)^2 ... + u(x_n)^2$$

→ Cas d'un produit : $y = x_1 \times x_2 \times ... x_n$

$$\frac{u(y)^2}{y^2} = \frac{u(x_1)^2}{x_1^2} + \frac{u(x_2)^2}{x_2^2} ... + \frac{u(x_n)^2}{x_n^2}$$

→ Cas d'une fonction puissance $y = x_1^q$

$$\frac{u(y)^2}{y^2} = q^2 \frac{u(x_1)^2}{x_1^2}$$

Exemple : on mesure avec deux multimètres une tension V = 10,00 V et une intensité I = 127,4 mA aux bornes d'un conducteur ohmique. Les incertitudes-types sont : u_V = 0,06 V et u_I = 0,8 mA. Quelle est l'incertitude-type sur la résistance du conducteur ohmique ?

2.7 incertitude élargie

Le fait de composer plusieurs sources d'erreurs indépendantes (dont la distribution n'est pas forcément gaussienne) permet de rentrer dans le cadre du théorème central limite : si une grandeur est influencée par un grand nombre de facteurs indépendants et si l'influence de chacun de ces facteurs pris séparément est petite, alors la distribution de probabilité est gaussienne.

En conséquence, **on appliquera dans la majorité des cas un facteur d'élargissement égal à 2 pour un niveau de confiance de 95 % et égal à 3 pour un niveau de confiance de 99 % :**
Dans l'exemple précédent, la résistance vaut 78,5 $\Omega \pm 1,4\Omega$ avec un niveau de confiance de 95 %.

U= 2u pour un niveau de confiance de 95 % et U = 3u pour un niveau de confiance de 99 %

Annexe 2 TP : Présentation des résultats numériques

En physique, les valeurs proposées dans un énoncé sont souvent le résultat de mesures. Ce sont donc des valeurs obtenues avec une précision finie. Il faut en tenir compte dans la présentation des résultats.

1. Notations scientifique et ingénieur

La notation scientifique est une représentation d'un nombre décimal x sous la forme d'un produit de deux facteurs $\pm$a. 10^n. Le premier facteur est un nombre décimal dont la valeur absolue de la partie entière est comprise entre 1 et 9, c'est-à-dire qu'il n'y a qu'un seul chiffre (non nul) à gauche de la virgule, puis un nombre variable de décimales (nombres après la virgule), qui dépend de la précision. Le second facteur est une puissance entière de 10.

La notation ingénieur est une représentation d'un nombre décimal x sous la forme d'un produit de deux facteurs $\pm$a.10^n. Le premier facteur est un nombre décimal compris entre 1 et 1000. Dans le second facteur, n est un multiple de 3. 2

2. Chiffres significatifs

1. Détermination du nombre de chiffres significatifs.

Dans un nombre, les chiffres autres que zéro sont significatifs. Les zéros s'ils sont placés en tête du nombre ne sont pas significatifs.

Exemples :
6,8 2 chiffres significatifs
6,80 3 chiffres significatifs
6800 4 chiffres significatifs
0,68 2 chiffres significatifs

2. Chiffres significatifs et précision

Si on ne dispose pas d'information concernant la manière dont les nombres sont obtenus, le nombre de chiffres significatifs indique la précision. Par convention, si on n'a pas d'autre indication, on considérera que le dernier chiffre significatif est connu à $\pm$ 0,5.

Exemples :
Écrire m = 11,597 kg signifie que 11,5975 kg > m > 11,5965 kg
Écrire m = 11,60 kg signifie que 11,605 kg > m > 11,595 kg
Écrire m = 11,6 kg signifie que 11,65 kg > m > 11,55 kg

Attention : lors de conversions d'unités ou de passage d'unités à leurs multiples ou sous multiples, il faut veiller à la conservation du nombre de chiffres significatifs.

Exemples : m=11,6 kg = 11,6.10^3 g (3 chiffres significatifs) mais pas 11 600 g (5 chiffres significatifs)
V=2,75 m^3 = 2,75.10^6 mL mais pas 2 750 000 L

3. Présentation du résultat d'un calcul

Il faut arrondir le résultat obtenu par un calcul afin d'exprimer le résultat avec une précision égale à celle de la donnée utilisée la moins précise.

Pour une addition ou une soustraction, le résultat ne doit pas avoir plus de décimales que la donnée qui en a le moins.
Pour une multiplication ou une division, le résultat ne doit pas avoir plus de chiffres significatifs que la donnée qui en a le moins.

Exemple : 25,42 (4 chiffres significatifs)x 72,5 (3 chiffres significatifs) = $1{,}84.10^3$ (3 chiffres significatifs)
le résultat a le même nombre de chiffres après la virgule que nombre de chiffres significatifs de la mesure.
Exemple : log(16,12) = 1,2074 **Exponentielle : le résultat a le même nombre de chiffres significatifs que le nombre de chiffres après la virgule de la mesure.**
Exemple : exp(-4,123) = $1{,}62.10^{-2}$